Topologia
Lista 2

Zad 1. Sprawdzić, które z danych rodzin są topologiami na $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$:

$$F_1 = \{\{1, 2, 3, ..., n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\},$$

$$F_2 = \{\{1, 3, 5, ..., 2n-1\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}.$$

Czy któraś z nich ma własność Hausdorffa?

Zad 2. Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Sprawdzić, które z rodzin

$$F_1 = \{A \subset X :\ A \text{ jest zbiorem skończonym lub } A = X\},$$

$$F_2 = \{A \subset X : X \setminus A \text{ jest zbiorem skończonym lub } A = \emptyset\}$$

są topologiami na X. Czy któraś z nich ma własność Hausdorffa?

Zad 3. Rozważmy podprzestrzeń X prostej euklidesowej $\mathbb{R}$.

a) Niech $X = [0, 1]$. Które ze zbiorów $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, \frac{1}{2})$, $A_3 = (\frac{1}{3}, 1]$, $A_4 = (0, 1)$ są domknięte, a które otwarte w X?

b) Niech $X = \mathbb{N}$. Wypisać topologię na X.

c) Niech $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Wyznaczyć wszystkie otwarto-domknięte zbiory jednoelementowe.

Zad 4. Wykazać, że podprzestrzeń przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa.

Zad 5. Pokazać, że jeżeli A jest domkniętym podzbiorem przestrzeni topologicznej X, zaś B jest domkniętym podzbiorem podprzestrzeni A, to B jest domkniętym podzbiorem X.

Zad 6. Pokazać, że w dowolnej przestrzeni topologicznej operacja domknięcia posiada własności

(OD1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(OD2) $A \subset \overline{A}$,

(OD3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(OD4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Na odwrót pokazać, że jeśli na podzbiorach X określona jest operacja $A \mapsto \overline{A}$ spełniająca warunki (OD1),(OD2), (OD3),(OD4), to zadaje ona strukturę przestrzeni topologicznej na X, a dokładniej

$$\tau = \{U \subset X : X \setminus U = \overline{X \setminus U}\}$$

jest topologią na X.

Zad 7. Wykazać, że dla dowolnego podzbioru przestrzeni topologicznej X zachodzą wzory

$$\operatorname{int}(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}, \qquad \overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{int} A.$$

Zad 8. Korzystając z Zadania 7 sformułować i wykazać stwiedzenie dualne do Zadania 6 (to znaczy wypisać własności operacji wnętrza, dzięki którym możemy „odtworzyć" topologię).

Zad 9. Pokazać, że wykonując dowolną ilość razy operacje domknięcia i dopełnienie na ustalonym podzbiorze przestrzeni topologicznej otrzymamy maksymalnie 14 różnych zbiorów. Ile zbiorów otrzymamy w przypadku podzbioru $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ prostej euklidesowej $\mathbb{R}$?